2010 年数学答案

北京博飞教育中心独家奉献

一、选择题

1. D 2. A 3. C 4. B 5. A 6. C 7. B 8. C 9. B 10. A 11. D 12. D

二、填空题

13. $(\frac{1}{9},+\infty)$

14. $(2,0)$或（$2,\frac{\pi}{2}$）

15. $\frac{1}{2}$

16. $f(x_1)<f(x_2)$

17. $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{12}=1$

18. $(x+3)(x-2)$

19. $\frac{13}{21}$

20. 48π

三、解答题

21. 解：设$OA=a,OB=b,OC=c$,则三棱锥O-ABC的体积为

V=$\frac{1}{6}abc=9.$ ①（2 分）

因为二面角$A-BC-O$与$B-AC-O$相等，所以$\triangle AOC$与$\triangle BOC$面积相等，得 ac=bc, 即有

$a=b$ ②（4 分）

由勾股定理、余弦定理，以及②得

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\bullet BC}=\frac{c^2}{a^2+c^2},$$

故由$\cos\angle ACB=\frac{1}{3}$得 $a^2=2c^2.$ ③（8 分）

联立①、②、③，求得$a=b=3\sqrt{2},c=3.$

于是有$A(3\sqrt{2},0,0),B(0,3\sqrt{2},0),C(0,0,3).$

所以平面π的方程为$\frac{x}{3\sqrt{2}}+\frac{y}{3\sqrt{2}}+\frac{z}{3}=1$,即

$x+y+\sqrt{2}z=3\sqrt{2}$ 。

22. 解：(I)化简得$f(x)=2+\sin(4x+\frac{\pi}{4}).$ ① （2 分）

由 $4x+\frac{\pi}{4}=k\pi$ 以及①得 $f(x)$ 的图像的对称轴的坐标为

$(\frac{4k-1}{16}\pi,2),k\in Z,$

所以离原点 0 的最近的对称中心的坐标为 $(-\frac{\pi}{16},2).$ （5 分）

由 $4x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 以及①得 $f(x)$ 的图像的对称轴的坐标的方程为

$x=\frac{4k+1}{16}\pi,k\in Z,$

所以离 y 轴最近的对称轴的方程为 $x=\frac{\pi}{16}$。 （8 分）

(II) 由①得 $f(x)$ 的最小正周期为

$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$ （10 分）

化方程 $f(x)-x-1=0$ 为同解方程

$$\sin(4x+\frac{\pi}{4})=x-1 \qquad ②$$

因为左端正弦函数的值域为[-1, 1]，而不等式 $|x-1|\le 1$ 的解集为 $[0,2]$，所以，只需在区间 $[0,2]$ 上，作函数 $y=\sin(4x+\frac{\pi}{4})$ 和 $y=x-1$ 的方程图像进行观察。如图所示，两个函数图像的交点数为 3，所以②有 3 个根。因原方程与②同解，故得原方程根的个数为 3.

23. 解：（I）由题设得 $a_n-2a_{n-1}=a_{n-1}-2a_{n-2},n\ge 3,$ 故 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是常熟列，又

$a_2-2a_1=4-2=2,$ 故 $a_n-2a_{n-1}=2,n\ge 2,$

从而 $a_n+2=2(a_{n-1}+2),n\ge 2$，即 $\{a_n+2\}$ 是首项为 $a_1+2=3,$ 公比为 2 的等比数列，所以

$a_n+2=3\times 2^{n-1}.$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times 2^{n-1}-2.$ （10 分）

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3\times 2^n-2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3-\frac{4}{2^n}}$

$=\frac{2}{3}$

24. 解：（I）依设，圆 0 的圆心为原点 0，半径 $r=3=|AB|$，所以动弦 AB 所对圆心角等于 $\frac{\pi}{3}$。

故可记

$A(3\cos\theta,\ 3\sin\theta)$，$B(3\cos(\theta+\frac{\pi}{3})，3\sin(\theta+\frac{\pi}{3}))$，$0\le\theta\le 2\pi.$

设 $P(x,y)$，由 $C(c,0)$ 和 $\overline{PA}+\overline{PB}+3\overline{PC}=0$，得

$$(3\cos\theta-x)+\left[3\cos(\theta+\frac{\pi}{3})-x\right]+3(c-x)=0,$$ （5 分）

$$(3\sin\theta-y)+\left[3\sin(\theta+\frac{\pi}{3})-y\right]+3(0-y)=0$$

即

$$3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=\frac{10}{3}x-2c$$

$$3\sin\theta+3\sqrt{3}\cos\theta=\frac{10}{3}y.$$

所以 $(\frac{10}{3}x-2c)^2+(\frac{10}{3}y)^2=12(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=12$，

化简得点 P 的轨迹方程为

$$(x-\frac{3}{5}c)^2+y^2=\frac{27}{25}.$$

该轨迹是圆，圆心坐标为 $(\frac{3}{5}c,0)$，半径为 $\frac{3\sqrt{3}}{5}$。

（II）F 与圆 0 恰有一个公共点等价与 F 与圆 0 相切，即 $\left|\frac{3}{5}c\right|=3\pm\frac{3\sqrt{3}}{5}.$

得 $c=5\pm\sqrt{3}$ 或 $c=-(5\pm\sqrt{3})$

25 解：（I）求导得

$$f'(x)=2x-2+\frac{a}{x}=\frac{1}{x}[2(x-\frac{1}{2})^2+(a-\frac{1}{2})],$$

若 $a>\frac{1}{2}$，则恒有 $f'(x)>0$；若 $a=\frac{1}{2}$，则当 $x\neq\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$ 且 $f'(\frac{1}{2})=0$。因此，

当 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在（0，+∞）上是单调增函数。

$a<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=0$ 有两个根

$$x_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-2a}),\ x_2=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-2a}).$$

（i）若 $a\le 0$，则当 $0<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，且 $f'(x_2)=0$。

因此，$f(x)$ 在 $(0，x_2)$ 上是减函数，在 $(x_2,+\infty)$ 上是增函数，在 x_2 处，取最小

值 $f(x_2)$。

（ii）若

$0<a<\frac{1}{2}$,则当$0<x<x_1$或$x>x_2$时，$f^{'}(x)>0$;当$x_1<x<x_2$时，$f^{'}(x)<0$,且$f^{'}(x_1)=f^{'}(x_2)=0$。

因此，$f(x)$在（0，x_1）上或在（$x_2,+\infty$）上，都是增函数，在（x_1,x_2）上是减函数，在

x_1处，有极大值$f(x_1)$,在x_2处有极小值$f(x_2)$.而且，当$x\to 0$时，$f(x)\to -\infty$，当$x\to +\infty$时，$f(x)\to +\infty$。所以，$f(x)$在（0，$+\infty$）上，既无最小值，也无最小值。

综上得a的取值范围为（$0,\frac{1}{2}$）。