



北京博飞华侨港澳台联考培训班——数学专项训练——数列 7

数列的极限

【题型 1】几个重要极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 + 1}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n^2 + 1}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n + 3^{n+2}}{(-5)^{n+1} + 3^n}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n + 7}{5n^2 + 7}$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 2}{2n^3 + n}$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{3n^2 + n}$$

【题型 2】先通分，后求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n + 1} - n \right)$$

【题型 3】先有理化，后求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right)$$



$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 1}}$$

【题型 4】 先求和，后求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 4 + \cdots + 2n}{n^2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{n+1}}{1 - 2 + 4 - \cdots + (-2)^{n+1}}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

【题型 4】 无穷等比数列的各项和

(1) 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 3， $a_1 = 2$ ，则 $a_2 =$ _____.

(2) 若无穷等比数列的各项和等于首项的 3 倍，则这个数列的公比为_____.

(3) 若无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 4，则首项 a_1 的取值范围是_____.

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2x)^n$ 存在，则实数 x 的取值范围是_____.

【题型 5】综合运用

(1) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 + a_2 = 9$, $a_1 a_2 a_3 = 27$, 前 n 项和为 S_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n , $\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{31}{32}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

答案:

题型一: 0, 3, 0, $-1/5$, $2/5$, $3/2$, 0

题型二: 0

题型三: $1/2$, $8/3$

题型四: $1/2$, $8/3$, $3/2$, 1, $3/4$

题型五: $2/3$, $2/3$, $(0, 4) \cup (4, 8)$, $[0, 1)$

题型六: 12, $-2/3$

数列的极限练习

1. 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{3n}{n+3}) = \underline{\hspace{2cm}} -2$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} \right) =$ B

A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 不存在

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 \neq 0$, 其前 n 项的和为 S_n , 且 $S_{n+1} = 2S_n + a_1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} =$ B

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

4. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & 1 \leq n \leq 1000, \\ \frac{n^2}{n^2 - 2n}, & n \geq 1001, \end{cases}$ 则数列 $\{a_n\}$ 的极限值 B

A. 等于0 B. 等于1 C. 等于0或1 D. 不存在

5. 已知 p 和 q 是两个不相等的正整数, 且 $q \geq 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q - 1} =$ C

A. 0 B. 1 C. $\frac{p}{q}$ D. $\frac{p-1}{q-1}$

6. 设正数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax - b) = 4$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} + ab^{n-1}}{a^{n-1} + 2b^n} =$ B

A. 0 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

7. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 是 2, 前 n 项的和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 - n^2}{S_n} =$. 3

8. 已知数列的通项 $a_n = -5n + 2$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$. $-\frac{5}{2}$

9. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 4n - \frac{5}{2}$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = an^2 + bn$, $n \in N^*$, 其中 a, b 为常数, 则

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ 的值是 1