## 2000 年数学试题参考答案

# 北京博飞教育中心独家奉献

**一、选择题：每个小题选对给 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给 0 分.**

1．B　2．D　3．C　4．B　5．A　6．B

7．A　8．D　9．D　10．C　11．B　12．D

**二、填空题：每一个小题满分 3 分，只要求直接填写结果.**

13．4　14．—112　15．900　16．$\sqrt[3]{2}$　17．$\frac{\pi}{3}$

18．$2x-y-2=0$　19．$3x^2+y^2=12(y\neq 0)$　20．$\sqrt{15}$

**三、解答题：**

**21．本题满分 10 分.**

**解：**应用余弦定理得

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-\frac{3}{2}ac$，

$\because\ \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=q$，$\therefore\left(\frac{1}{q}\right)^2+q^2-\frac{3}{2}=1$，

即 $q^4-\frac{5}{2}q^2+1=0$，$(q^2-2)\left(q^2-\frac{1}{2}\right)=0$，

$\because$，$q>1$　$\therefore q^2-\frac{1}{2}\neq 0$，得 $q^2-2=0$，

因此，得公比 $q=\sqrt{2}$.

应用正弦定理得

$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}=q=\sqrt{2}$，$\therefore\sin C=\sqrt{2}\sin B=\sqrt{2(1-\cos^2 B)}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

**22．本题满分 10 分.**

**解：**设点 $P$ 的坐标为 $(x,y,z)$，由 $P\in l$ 得 $\frac{x-6}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-2}=t$，

$\therefore x=2t+6,y=-t-1,z=-2t+2$；

由 $P\in\pi$ 得 $2x-2y+z=4$，

$\therefore 2(2t+6)+2(t+1)-2(t-1)=4$，即 $2t=-6$，得 $t=-3$，

$\therefore x=0,y=2,z=8$.求得点 $P$ 的坐标为（0，2，8）.

设直线$l_1$的方向向量为$(a,b,c)$，则$a,b,c$不全为零，同时，由$l_1\subset\pi$得$2a-2b+c=0$，

由$l_1\perp l$得$2a-b-2c=0$. ∴ $a=\dfrac{5}{2}c,b=3c,c\neq 0$.

因为$l_1$经过点$P$，所以得直线$l_1$的方程为$\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{6}=\dfrac{z-8}{2}$.

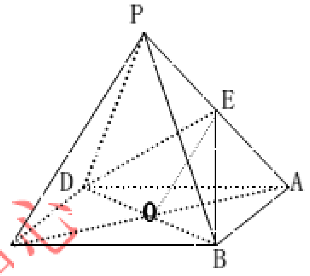
**23．本题满分 10 分.**

（1）**证**：连结$AC$，交$BD$于$O$，则$AO=OC$；连结$EO$，

∵ $PE=EA$，∴ $EO//PC$，

∵ $P\notin$平面$BDE$，$EO\subset$平面$BDE$，

∴ $PC//$平面$BDE$.




（2）**解**：∵ $PA\perp$平面$BDE$，点$E$是垂足，

∴ $\angle PBE$是$PB$与平面$BDE$所成的角.

∵ $EO\subset$平面$BDE$，∴ $PA\perp EO$，

∵ $PC//EO$，∴ $PC\perp PA$，又$PC=PA$，得

$AC=\sqrt{PC^2+PA^2}=\sqrt{2}PA$；

∵底面$ABCD$是正方形，∴ $AC=\sqrt{2}AB$，

因此得$AB=PA=PB$，$\Delta ABP$是正三角形，又$E$是$PA$中点，故得所求的角（即$\angle PBE$）为$30^\circ$.



**24．本题满分 10 分.**

**解**：由$P(-1,0)$和$Q(3,0)$得$PQ$的垂直平分线为直线$x=1$，故可设圆心$N$的坐标为$(1,t)$，$|t|$为点$N$到直线$PQ$的距离.

依设，$P$、$Q$、$B$、$C$四点共圆，$A$、$B$、$C$三点共线，且$|AB|=|AC|$，$|BC|=|PQ|$，

所以$|NA|=|t|$，$\sqrt{1+(t-2)^2}=|t|$，∴ $4t=5,t=\dfrac{5}{4}$；

圆$N$的半径$r=|NP|=\sqrt{4+t^2}=\dfrac{\sqrt{89}}{4}$.

因此，圆$N$的方程为$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{89}{16}$.

设直线$l$的斜率为$k$，因为$NA\perp l$，所以$-\dfrac{1}{k}=\dfrac{t-2}{1-0}=-\dfrac{3}{4}$，得$k=\dfrac{4}{3}$,

故直线$l$的方程为$y=\dfrac{4}{3}x+2$，即 $4x-3y+6=0$.

**25．本题满分 10 分.**

**解**：依题意得 $f(x)=a(x-2)(x-6),a<0$.

故当 $x=\frac{1}{2}(2+6)=4$ 时，$f(x)$ 取最大值 $f(4)=8$，得 $-4a=8,a=-2$，

$\therefore f(x)=-2x^2+16x-24$.

不等式 $|f(x)|\le 10x$ 即为 $|x^2-8x+12|\le 5x$，

同解于 $\begin{cases}x\ge 0,\\ -5\le x^2-8x+12\le 5x;\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\ge 0,\\ 0\le x^2-3x+12\le 10x.\end{cases}$

由判别式 $\Delta=9-48<0$，知对任意 $x\in R$ 都有 $x^2-3x+12\ge 0$；

解不等式 $x^2-3x+12\le 10x$，得 $(x-1)(x-12)\le 0,1\le x\le 12$.

所以，原不等式的解集为 $\{x|x\in R$ 且 $1\le x\le 12\}$.

26．本题满分 10 分.

**解**：因为 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\ne 0$，所以，依题意，得行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & b\\ a & 2 & a-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & 1 & a\\ a & 2 & 0\end{vmatrix}=0,$$

即 $\begin{cases}(a-1)+2ab-2b=0,\\ 2a^2-2a-ab=0。\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}(a-1)(1+2b)=0, & ①\\ a(2a-b-2)=0. & ②\end{cases}$

由式 ① 得 $a=1$ 或 $b=-\frac{1}{2}$，

当 $a=1$ 时，代入 ② 式，得 $b=0$；

当 $b=-\frac{1}{2}$ 时，代入 ② 式，得 $a=0$ 或 $a=\frac{3}{4}$.

经检验，得合乎题意的$a,b$值为：$\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{3}{4},\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$。

**27．本题满分为10分.**

**解：**化圆方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=4$，得圆心为点$N(-1,2)$，半径为$r=2$.

取弦$PQ$的中点$M$，则弦心距为$|MN|=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}|PQ|^2}$；

依设 $|MN|=|PQ|$，所以$|PQ|^2=r^2-\frac{1}{4}|PQ|^2$；得$|PQ|=\dfrac{2r}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

根据点到直线的距离公式，得$|MN|=\dfrac{4}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\because |MN|=|PQ|=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$\therefore \sqrt{1+k^2}=\sqrt{5}$，即$k^2=4$，

得$k=\pm 2$.