2001 年数学试题参考答案

北京博飞教育中心独家奉献

一、选择题：每个小题选对给 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给 0 分.

1．C　2．D　3．A　4．C　5．A　6．B

7．A　8．D　9．B　10．C　11．B　12．D

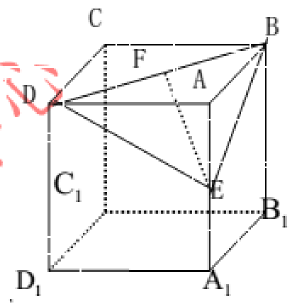
二、填空题：每一个小题满分 3 分，只要求直接填写结果.

13．$2x+3y+2z=14$　14．12　15．36　16．$\frac{\pi}{2}$

17．2π　18．3　19．8　20．106

三、解答题：

21．本题满分 10 分.



解：（1）截去的小角是三棱锥 $E-ABD$，

依题意得 $EA\perp$ 面 ABD，$EA=\frac{1}{2}a, S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}a^2$，

所以，截去部分的体积为 $V_1=\frac{1}{3}EA\bullet S_{\Delta ABD}=\frac{1}{12}a^3$，

剩下部分的体积为 $V_2=a^3-V_1=\frac{11}{12}a^3$.

（2）$\because BD=\sqrt{2}a, BE=DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

$\therefore$ 取 BD 中点 F，则有 $EF\perp BD$，$EF=\sqrt{BE^2-BF^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，

$S_{\Delta BDE}=\frac{1}{2}EF\bullet BD=\frac{\sqrt{6}}{4}a^2$；

设点 A 到平面 BDE 的距离为 h，则三棱锥 $A-BDE$ 的体积

$V_1=\frac{h}{3}S_{\Delta BDE}=\frac{\sqrt{6}}{12}a^2$，

由（1）的解知 $V_1=\frac{1}{12}a^3$，所以得 $h=\frac{a}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}a$.

22．本题满分 10 分.

解：由余弦定理和题设得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a}{2b}$，$\therefore b^2=c^2$，

$\because b>0,c>0$，$\therefore b=c,B=C,A=180^\circ-2C$；

其次，依设 $a=\frac{1}{3}(b+c)$，故$a=\frac{2}{3}b$，从而

$\cos C=\frac{a}{2b}=\frac{1}{3},\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \sin A=\sin(180^\circ-2C)=\sin 2C=2\sin C\cos C=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

23．本题满分 10 分.

解：$\because$左端行列式 $=\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ -1 & 2 & x-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ -1 & 3 & x-3 \end{vmatrix}$

$=x^2(x-6)$，

$\therefore$原不等式$\Leftrightarrow x^2(x-6)\ge 0$，

得$x=0$或$x-6\ge 0$，所以不等式的解集为$\{x|x=0或x\ge 6\}$.

24．本题满分 10 分.

解： $x-1<(x-a)^2+2a \Leftrightarrow (x-a)^2-(x-a)+(a+1)>0$

此式对任何实数x恒成立的充要条件是

$1-4(a+1)<0$，即$a>-\frac{3}{4}$；

其次，$(x-a)^2+2a<a(x-1)^2+6 \Leftrightarrow (a-1)x^2+(6-a-a^2)>0$，

此式对任何实数x恒成立的充要条件是

$\begin{cases} a-1\ge 0, \\ 6-a-a^2>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a\ge 1, \\ (a-2)(a+3)<0, \end{cases}$ 得$1\le a<2$.

综合以上讨论，得a的取值范围为区间$[1,2)$.

25．本题满分 10 分.

解：依题意，可设直线l 的方程为$y=2x+b$，

其中，b为待定系数，与椭圆方程联立，消去y得$9x^2+8bx+2(b^2-1)=0$，

依题意，该二次方程有不同的两个实根x_1和x_2，分别为点A和B的横坐标，故判别式

$8^2b^2-8\times 9(b^2-1)>0$，即$b^2<9$；且有$x_1+x_2=-\frac{8}{9}b, x_1x_2=\frac{2}{9}(b^2-1)$.

其次，椭圆的半焦距$c=\sqrt{2-1}=1$，右焦点为$F(1,0)$.

由F到l的距离为$\frac{\sqrt{5}}{2}$得 $\frac{|2+b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，即$b=-2\mp\frac{5}{2}$，

$\because b^2<9$，$\therefore b=\frac{1}{2}$.

从而$x_1+x_2=-\frac{4}{9}, x_1x_2=-\frac{1}{6}$，$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{70}{81}$，

最后，得A,B两点的距离为$|AB|=\sqrt{5}|x_1-x_2|=\frac{5\sqrt{14}}{9}$.

26．本题满分 10 分.

解：由 $f(x)\geq f(4)$得：对任何实数x都有不等式$x^2+px-(16+4p)\geq 0$，

所以判别式$p^2+4(16+4p)\leq 0$，即$(p+8)^2\leq 0$，

因为 $(p+8)^2\geq 0$恒成立，所以得$(p+8)^2=0$，即$p=-8$；

所以，由$f(2)=0$得$4-16+q=0$，$\therefore q=12$；

从而$f(3)=9+3p+q=-3$.

27．本题满分 10 分.

解：依题意，可设直线l的方程为$y=k(x-2)+1$，

其中$k\neq 0$为待定系数.与抛物线方程联立，消去x，得$y^2-\frac{4}{k}y+(\frac{4}{k}-8)=0$，

依题意，该二次方程有实根y_1和y_2，分别为点P和Q的纵坐标，

$\therefore y_1+y_2=\frac{4}{k}$.

由$A(2,1)$是PQ的中点，得$\frac{y_1+y_2}{2}=1$，$\therefore \frac{4}{k}=2$，得$k=2$.

从而直线l的方程为$y=2(x-2)+1$，即$2x-y-3=0$.