2003年数学试题参考答案

北京博飞教育中心独家奉献

一、选择题：每个小题选对给3分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给0分.

1．B　　2．B　　3．A　　4．B　　5．C　　6．C

7．A　　8．D　　9．D　　10．B　　11．D　　12．B

二、填空题：每一个小题满分3分，只要求直接填写结果.

13．$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$　　14．-4　　15．$\frac{16}{3}\pi$　　16．56

17．235　　18．24　　19．$\frac{\pi}{4}$　　20．4

三、解答题：

21．本题满分10分.

解： 设所求平面方程为$ax+by+cz+d=0$，由平面含A、B两点得$\begin{cases}b+d=0,\\a+c+d=0,\end{cases}$

由平面与π垂直得$2a-3b+c=0$，$\therefore\begin{cases}b=-d,\\a+c=-d,\\2a+c=-3d,\end{cases}$

解得$a=-2d,b=-d,c=d$.

因为平面方程中的系数a,b,c不全为零，所以$d\neq0$，所求的平面方程可写为

$-2dx-dy+dz+d=0$，　即$2x+y-z-1=0$.

22．本题满分10分.

解： 由题设可得直线AB,AC,BC的方程

依次为$y=0$，　$y=\frac{4}{3}(x+25)$，　$y=-\frac{3}{4}(x-25)$.

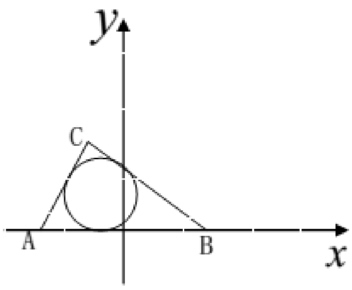
因此，如图，可设ΔABC内切圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$，

式中$b>0$，且a、b满足

$\frac{4}{3}(a+25)-b>0$，　　$-\frac{3}{4}(a-25)-b>$.

由内切圆心(a,b)到三边距离相等得

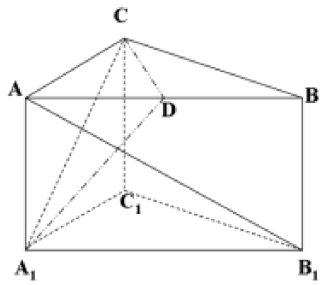
$\frac{4a-3b+100}{5}=\frac{-(3a+4b-75)}{5}=b$，



$\therefore \begin{cases} a-2b+25=0, \\ a+3b-25=0, \end{cases}$ 解得 $a=-5, b=10$.

即得 ΔABC 内切圆的方程为 $(x+5)^2+(y-10)^2=100$.

23．本题满分 10 分.



解: 根据正三棱柱性质，ΔABC 是正三角形，取 AB 的中点 D，连结 CD，A_1D，

则 $CD \perp AB$；其次，又有面 $ABC \perp$ 面 ABB_1A_1，AB 是交线，

$\therefore CD \perp$ 面 ABB_1A_1.

从而，A_1D 是 A_1C 在面 ABB_1A_1 上的射影，

依设 $AB_1 \perp A_1C$，所以得 $AB_1 \perp A_1D$.

又 $AB \perp AA_1$，$\therefore$ $\angle BAB_1 = \angle AA_1D$，得 $Rt\Delta AB_1B \backsim Rt\Delta A_1DA$，故 $\dfrac{AB}{A_1A}=\dfrac{BB_1}{AD}$，

即得 $A_1A^2 = A_1A \bullet BB_1 = AB \bullet AD = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{2}$，$\therefore A_1A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\because S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，

$\therefore$ 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $V=A_1A \bullet S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}a^3$.

（注：本题也可用向量法求解，此处从略.）

24．本题满分 10 分.

解: 设 $z_1=a+bi, z_2=c+di, a$、b、c、$d \in R$，

依题设得

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2+a, & ① \\ a^2+b^2=(a-c)^2+(b-d)^2, & ② \\ a+c=0, & ③ \\ b+d=3. & ④ \end{cases}$$

解得 $c=\frac{\sqrt{3}}{2},d=\frac{3}{2},a=-\frac{\sqrt{3}}{2},b=\frac{3}{2}$，

或 $c=-\frac{\sqrt{3}}{2},d=\frac{3}{2},a=\frac{\sqrt{3}}{2},b=\frac{3}{2}$，

即得 $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$，

或 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i,z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

（注：本题也可用向量几何法或三角法求解，此处从略.）

25．本题满分 10 分.

解：（Ⅰ）记等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则有 $a_n=a_1q^{n-1}\neq 0$，

$a_nS_{n+1}-a_{n+1}S_n=a_n(S_{n+1}-qS_n)=a_na_1=a_1^2q^{n-1}$，

所以，当 $q>0$ 时，对任意正整数 n，都有 $a_nS_{n+1}>a_{n+1}S_n$，

当 $q<0$ 时，若 n 为奇数，则 $a_nS_{n+1}>a_{n+1}S_n$，

若 n 为偶数，则 $a_nS_{n+1}<a_{n+1}S_n$.

（Ⅱ）当公比 $q=1$ 时，$a_n=a_1,S_n=na_1\neq 0$，得

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2}{(2n+1)a_1^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$，

当公比 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1^2q^{n-1}}{a_1^2q^{n-1}+2a_{n+1}S_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q}{1-q+2q(1-q^n)}$

$$=\begin{cases}\frac{1-q}{1+q}, & \text{当 } |q|<1 \text{ 时，}\\ 0, & \text{当 } |q|>1 \text{ 时，}\\ \text{不存在，} & \text{当 } q=-1 \text{ 时.}\end{cases}$$

26．本题满分 10 分.

解： 应用对数换底公式，原不等式可化为 $x^2+2x\log_3 a+4\log_3 a-3\geq 0$，

此式对任意 $x\in R$ 都成立，其充要条件为 $4(\log_3 a)^2-4(4\log_3 a-3)\leq 0$，

即 $(\log_3 a-1)(\log_3 a-3)\leq 0$，解得 $1\leq \log_3 a\leq 3$，

所以，a 的取值范围为 $3\leq a\leq 27$，即区间 $\left[3,27\right]$.

27．本题满分 10 分.

解： 原方程等价于 $(a_1x-a_2)^2+(a_2x-a_3)^2+\ldots+(a_{n-1}x-a_n)^2=0$，

即 $a_kx-a_{k-1}=0, k=1,2,\ldots,n-1$.

所以，方程有非零实根 $x=q\neq 0$，等价于：当 $k=1,2,\ldots,n-1$ 时，$a_{k+1}=a_kq$，

由于 $a_1\neq 0$，$n\geq 3$，所以也即等价于数列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是公比为 q 的等比数列.