2004 年数学试题参考答案

北京博飞教育中心独家奉献

一、选择题：每个小题选对给 3 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给 0 分.

1．A　　2．B　　3．A　　4．C　　5．A　　6．C

7．D　　8．D　　9．B　　10．C　　11．D　　12．B

二、填空题：每一个小题满分 3 分，只要求直接填写结果.

13．$\frac{7}{9}$　　14．2　　15．6π　　16．$(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

17．—2　　18．$\frac{1}{15}$　　19．16　　20．$3x^2+2x$

三、解答题：

21．本题满分 10 分.

解： 设 $p=(x,y)$，由 $p\perp(a-b)$ 得 $(4+6)x+(1-7)y=0$，$\therefore y=\frac{5}{3}x$.

$\because p\neq 0$，$\therefore p=(x,\frac{5}{3}x)$，$x\neq 0$.

$\because |a|=\sqrt{17},|p|=\frac{\sqrt{34}}{3}|x|,p\bullet a=4x+\frac{5}{3}x=\frac{17}{3}x,$

$\therefore \cos<p,a>=\frac{p\bullet a}{|p|\bullet|a|}=\frac{\sqrt{2}x}{2|x|}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$

式中，当 $x>0$ 时，取"+"号，当 $x<0$ 时，取"−"号.所以得 $<p\bullet a>=45^\circ$ 或 135°.

22．本题满分 10 分.

解法 1： 依设知 $2B=A+C=\pi-B$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

设角 A、B、C 所对边长分别为 a、b、c，则有 $a+b+c=12$.

应用余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-3ac\geq\frac{1}{4}(a+c)^2$，

$\therefore b\geq\frac{a+c}{2}$，即 $b\geq 4$.

当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时，$b=4$.所以 b 的最小值为 4.

解法 2： 依设知 $B-A=C-B,A+B+C=\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

设角 A、B、C 所对边长分别为 a、b、c，则有 $a+b+c=12$.

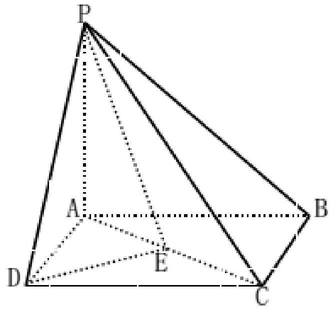
应用正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=k$.

$a+c=k(\sin A+\sin C)=2k\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2k\sin B\cos\frac{A-C}{2}\le 2b$.

$\therefore b\ge 4$.

当ΔABC为等边三角形时，b取得最小值 4.

23．本题满分 10 分.



解法 1：（Ⅰ）由$PA\perp$底面知$PA\perp AB$，

且AB是PB在底面$ABCD$上的射影.

所以，根据三垂线定理，由$CB\perp AB$得$CB\perp PB$.

因此，$\angle PBA$是二面角$P-BC-A$的平面角.

依设$\angle PBA=45^\circ$在ΔPAB中，$\angle PAB=90^\circ$，

故$PA=AB$，得$\frac{PA}{AB}=1$.

（Ⅱ）由$PA\perp$底面知截面$PAC\perp$底面$ABCD$，AC是这两个面的交线.

取AC的中点E，连结PE，DE，则$DE\perp AC$.

$\because DE\subset$底面$ABCD$，$\therefore DE\perp$截面PAC.

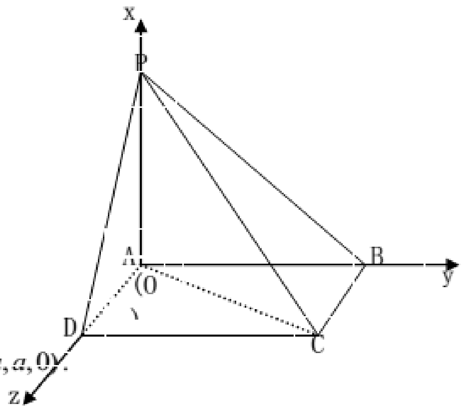
得$\angle DPE$是PD与截面PAC所成的角.

设底面正方形的边长为a，由（Ⅰ）知$PA=AB=a$，

因此ΔPAD和ΔADC都是等腰直角三角形，腰长为a，

得$PD=\sqrt{2}a, DE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. $\sin\angle DPE=\frac{DE}{PD}=\frac{1}{2}$.

所以PD与截面PAC所成的角等于30°.



解法 2：（Ⅰ）如图，建立空间直角坐标系$O-xyz$.

设$PA=h, AB=a$，则有$P(0,0,h), A(0,0,0), B(0,a,0), C(a,a,0)$.

所以，平面PBC和平面$ABCD$的方程分别为$hy+az=ah$和$z=0$，

其法向量分别为$n=(0,h,a)$和$m=(0,0,1)$，它们的夹角$<n,m>$与二面角$P-BC-A$的大小相等.

依题设得，$<n,m>=45^\circ$，又$\cos<n,m>=\frac{n\bullet m}{|n|\bullet|m|}=\frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}$，

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{h}{a}\right)^2+1}}=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$， 解得 $\dfrac{h}{a}=1$，即得 $\dfrac{PA}{AB}=1$.

（Ⅱ）平面 PAC 的方程为 $x-y=0$，法向量为 $k=(1,-1,0)$.

由 $P(0,0,h)$ 和 $D(a,0,0)$ 知直线 PD 的方向向量为 $l=(a,0,-h)$.由（Ⅰ）知 $a=h$，所以 $l=a(1,0,-1)$.

因为 k 和 l 指向平面 PAC 的同一侧，

所以 $<k,l>$ 等于 PD 与平面 PAC 所成的角 θ 的余角，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-<k,l>$.

$\because \cos<k,l>=\dfrac{k\bullet l}{|k|\bullet|l|}=\dfrac{1}{2}$， $\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

得 PD 与截面 PAC 所成的角等于 $\dfrac{\pi}{6}$.

24．本题满分 10 分.

解：两点 $M(x_1,y_1)$ 和 $N(x_2,y_2)$ 关于直线 $l:x+2y=8$ 对称的充要条件是 l 垂直平分 MN，设直线 MN 的方程为 $y=2x+b$，式中 b 为常数.

由 M,N 在抛物线上，知 y_1、y_2 满足方程 $y^2=p(y-b)$，即二次方程 $y^2-py+pb=0$ 有不等的实根 y_1 和 y_2，所以判别式 $\Delta=p^2-4pb>0$， ①

且 $y_1+y_2=p$.由 MN 的中点 $P(x_0,y_0)$ 在 l 上，

$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{p}{2},x_0=8-2y_0=8-p$.

又 $x_0=\dfrac{1}{2}(y_0-b)=\dfrac{1}{4}(p-2b)$，$\therefore p-2b=4(8-p)$. ②

由①、②两式消去 b 得不等式 $p(64-9p)>0$，与 $p>0$ 联立，解得 p 的取值范围为 $0<p<\dfrac{64}{9}$.

25．本题满分 10 分.

解：依题意得 $\begin{cases}|\lg a|=|\lg\sqrt{b}|,\\ |\lg a|=\left|\lg\dfrac{a+b}{2}\right|,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\left(\lg a-\lg\sqrt{b}\right)\left(\lg a+\lg\sqrt{b}\right)=0,\\ \left(\lg a-\lg\dfrac{a+b}{2}\right)\left(\lg a+\lg\dfrac{a+b}{2}\right)=0.\end{cases}$

化简得$\begin{cases}\left(\lg\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)\lg(a\sqrt{b})=0,\\ \left(\lg\dfrac{2a}{a+b}\right)\lg\dfrac{a(a+b)}{2}=0.\end{cases}$

$\because a\ne b$，$\therefore 2a\ne a+b,\lg\dfrac{2a}{a+b}\ne 0$，

因此，得①$\begin{cases}\lg\dfrac{a}{\sqrt{b}}=0,\\ \lg\dfrac{a(a+b)}{2}=0,\end{cases}$ 或②$\begin{cases}\lg(a\sqrt{b})=0,\\ \lg\dfrac{a(a+b)}{2}=0.\end{cases}$

由方程组①得$\begin{cases}a=\sqrt{b},\\ a(a+b)=2.\end{cases}$ 即$\begin{cases}a=\sqrt{b},\\ (a-1)(a^2+2a+2)=0.\end{cases}$

解得$a=1,b=1$，与条件$a\ne b$矛盾，应舍去.

由方程组②得$\begin{cases}a\sqrt{b}=1,\\ a(a+b)=2.\end{cases}$ 即$\begin{cases}a\sqrt{b}=1,\\ (a-1)(a^2+a-1)=0.\end{cases}$

由$a\sqrt{b}=1$和$a\ne b$知$a\ne 1$，又$a>0,b>0$，所以解得$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},b=\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}$.

经检验，这两个值即为所求.

26．本题满分 10 分.

解：因为直线$x+2y=8$的斜率为$-\dfrac{1}{2}$，所以直线MN的斜率为 2，

可设直线MN的方程为$y=2x+b$，式中b为待定常数.

设$M(x_1,y_1)$和$N(x_2,y_2)$，则$y_1\ne y_2$，且y_1,y_2都满足方程$y^2-2y+2b=0$，

$\therefore y_1+y_2=2$.

记MN的中点为$P(x_0,y_0)$，则$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=1$，

且点p在直线$x+2y=8$上，得$x_0=8-2y_0=6$.

$\therefore b=y_0-2x_0=-11$.

所以直线MN的方程为$y=2x-11$.

27．本题满分 10 分.

解：依题设，知$0 \le f(6) \le 0$，

得$f(6)=0$，所以可设$f(x)=(x-6)(x-x_0)$.

依题设，又知$0 \le f(2) \le 6-2=4$，

$$0 \le f(3) \le 6-3.$$

即$0 \le -4(2-x_0) \le 4, 0 \le -3(3-x_0) \le 3$，

$\therefore \begin{cases} 2 \le x_0 \le 3, \\ 3 \le x_0 \le 4. \end{cases}$ 得$x_0=3$.

$\therefore f(x)=(x-6)(x-3)$，即$f(x)=x^2-9x+18$.与$f(x)=x^2+ax+b$比较，求得

$a=-9, b=18$.