2005 年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题参考答案和评分参考

说明：

一、　本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

二、　对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、　解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、　只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

五、　所有考生做第一、第二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类考生做第三（24、25）题，报考史文类考生做第三（26、27）题.

一、选择题：每小题选对给 5 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给零分.

（1）D　(2)A　(3) B　(4)B　(5) A　(6)C

(7)　C　(8)D　(8) A　(10)C　(11)C　(12) B

二、填空题：每小题满分 4 分，只要求直接填写结果.

（13）2　（14）11　（15）-5　（16）$\frac{\pi}{2}$

（17）6　（18）$\left(1,-\frac{3}{4}\right)$　（19）$2x-1$　（20）$\sqrt{2}$

三、解答题

（21）本题满分 14 分

解：由题设得　$a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1\ (n=1,2,\cdots)$　　····4 分

所以　$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=(n-1)+2\sum_{k=1}^{n-1}k,$　　····8 分

即 $a_n-a_1=(n-1)+n(n-1)=n^2-1.$　　····10 分

因为 $a_1=1$，　　所以 $a_n=n^2, n=1,2,\cdots$.　　····14 分

（22）本题满分 14 分

解：依题设，　得平面 π 的一个法向量 ***n***=（2，1，-1）

又点 A 的坐标为（1，0，2），所以直线 l 的方程为：

$\frac{x-1}{2}=y=2-z$；　　····4 分

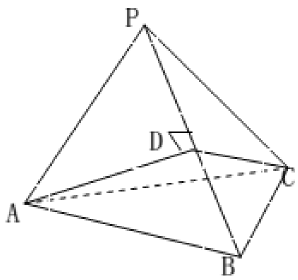
设点 B 的坐标（x, y, z），满足方程组

$$\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \\ z=2-y \end{cases}$$　　····9 分

解得　$x=2$，$y=\frac{1}{2}$，$z=\frac{3}{2}$

即点 B 的坐标为 $(2,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$。　　····14 分

（23）本题满分 14 分



解：由题设知 PA=PC,AB=BC,又 PB 是公共边，

得　$\Delta PAB \cong \Delta PC$

所以，过 A 作 $AD\perp PB, D$ 是垂足，连接 CD，

则 $CD\perp PB$，且 AD=CD,

得 $\angle ADC$ 是二面角 $A-PB-C$ 的平面角，

且 $\cos(\angle ADC)=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\bullet CD}=1-\frac{1}{2}(\frac{AC}{AD})^2$

由题设又知 $AB\perp BC$，$AB\perp PA$，$PA=AC$,

所以，$PB^2=PA^2+AB^2=AC^2+AB^2=2AB^2+BC^2=3AB^2$,

又　$PA\bullet AB = AD\bullet$,

所以　$(\frac{AC}{AD})^2 = (\frac{PA}{AD})^2 = (\frac{PB}{AB})^2 =$

得　$\cos(\angle ADC)=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$, 即 $\angle ADC=120^0$，

所以，二面角 $A-PB-C$ 的大小为 120^0.　　····14 分

（24）本题满分 15 分

解：求导数，得 $f'(x)=5-\frac{2(2x+1)}{\sqrt{x^2+x}}, x>0$ ····5 分

令 $f'(x)=0$, 得 $25(x^2+x)=4(2x+1)^2, x\geq 0,$

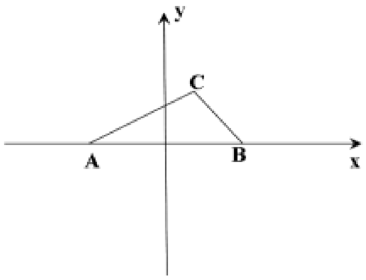
解得 $x=\frac{1}{3}$，因为 $f'(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，所以，由 $f'(\frac{1}{4})<0$ 和 $f'(1)>0$ 知：在区间 $(0,\frac{1}{3})$ 上，$f'(x)<0$，$f(x)$ 是减函数；在区间 $(\frac{1}{3},+\infty)$ 上，$f'(x)>0$，$f(x)$ 是增函数. ····10 分

因为 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(0)=0, f(\frac{1}{3})=-1,$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-16(x^2+x)}{5x+4\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x-16}{5+4\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=+\infty$$

所以，函数 $f(x)$ 的单调区间为 $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{1}{3},+\infty)$，函数的值域为 $[-1,+\infty)$. ····15 分

（25）本题满分 15 分



解：如图，设点 C 的坐标为 (x,y),，则有 $-1<x<1, y>0,$ 且

$$\tan A=\frac{y}{x+1}, \tan B=\frac{y}{1-x}$$

依题设得点 C 的轨迹方程为 $\left(1+\frac{y}{x+1}\right)\left(1+\frac{y}{1-x}\right)=m$，

$$即\quad \frac{x^2}{\frac{m}{m-1}}+\frac{(y+1)^2}{m}=1, \qquad (1)$$

式中，$m>1, -1<x<1, y>0.$ ····5 分

（I）当 $m=2$ 时，方程（1）是圆的方程，所以，不存在合乎题意的定点 E、F;

（II）当 $m>1$ 且 $m\neq 2$ 时，方程（1）是椭圆方程，所以，椭圆的两个焦点为所点 E、F, ΔEFC 得周长等于椭圆的长轴长与焦距之和，为定值. ····10 分

这时，有两种情形：

情形 1：当 $1<m<2$ 时，$\frac{m}{m-1}>m>0$，所求定点 E、F 的坐标为 $(\pm\sqrt{\frac{m(2-m)}{m-1}},-1),$

ΔEFC 周长为定值 $2(1+\sqrt{2-m})\sqrt{\dfrac{m}{m-1}}$;

情形 2：当 $m>2$ 时，$m>\dfrac{m}{m-1}>0$, 所求定点 E、F 的坐标为 $(0,-1\pm\sqrt{\dfrac{m(m-2)}{m-1}})$,

ΔEFC 周长为定值 $2\sqrt{m}(1+\sqrt{\dfrac{m-2}{m-1}})$.

（注：当点 C 在 y 轴上时，E、F、C 共线，ΔEFC 属于退化情形.） ····15 分

（26）本题满分 15 分

解：求导数，得 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$, ····5 分

所以，在区间 $[0,3)$ 上，$f'(x)<0, f(x)$ 是减函数；在区间 $(3,4]$ 上，$f'(x)>0$，

$f(x)$ 是增函数.而 $f'(3)=0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,4]$ 上的最小值为 $f(3)=-22$.

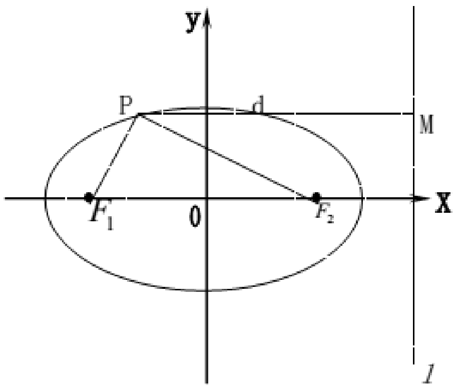
又 因为 $f(0)=5, f(4)=-15$,

所以在区间 $[0,4]$ 上的函数 $f(x)$ 得值域为 $[-22,5]$.

（27）本题满分 15 分

解：依题设，得椭圆的长半轴长 $a=4$, 短半轴长 $b=\sqrt{7}$, 所以半焦距为 $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$,

左、右焦点为 $F_1(-3,0)$ 和 $F_2(3,0)$.



如图，在 ΔPF_1F_2 中应用正弦定理，由

$$\sin\angle(PF_1F_2)=3\sin\angle(PF_2F_1)$$

得 $|PF_2|=3|PF_1|$ （1）

因为点 P 在椭圆上，所以

$|PF_1|+|PF_2|=2a=8.$ （2）

联立（1）、（2）求得 $|PF_1|=2, |PF_2|=6.$ ····10 分

因为椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{4}$,

所以点 P 到右准线的距离为

$d=\dfrac{1}{e}|PF_2|=8.$ ····15 分