2006年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题参考答案和评分参考

说明：

一、　本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

二、　对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、　解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、　只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

五、　所有考生做第一、第二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类考生做第三（24、25）题，报考史文类考生做第三（26、27）题.

一.　选择题

（1）D　（2）A　（3）C　（4）B　（5）A　（6）D

（7）D　（8）B　（9）C　（10）B　（11）D　（12）C

二．填空题

（13）$\frac{2\pi}{3}$　（14）8　（15）2　（16）$(2,\frac{\pi}{2})$

（17）$\frac{5}{6}$　（18）5　（19）$\frac{1}{1000}$　（20）$\frac{3}{5}$

三．解答题

（21）本题满分14分

解：设$|b|=r, <a,b>=\theta$,因为$|a|=2$,所以$a\bullet b=2r\cos\theta$

由$(2a+b)\perp a$，得$a\bullet(2a+b)=0$, $a\bullet b=-2a\bullet a=-2|a|^2=-8$.所以$r\cos\theta=-4$

且有

$$|2a+b|^2=(2a+b)\bullet(2a+b)=r^2-16$$
$$|b-2a|^2=(b-2a)\bullet(b-2a)=r^2+48,$$
$$(2a+b)\bullet(b-2a)=r^2-16.$$

因为$<2a+b,b-2a>=45^\circ$所以$\sqrt{r^2-16}\bullet\sqrt{r^2+48}\cos45^\circ=r^2-16$

得 $r^2-16=0$ （1）

或$\frac{1}{2}(r^2+48)=r^2-16$ （2） ··········10 分

由（1）式得$r=4$ 所以$\cos\theta=-\frac{4}{r}=-1$

即有$\theta=\pi$，与a,b不共线矛盾，故舍去

由式（2）得$r=4\sqrt{5},$ 所以$\cos\theta=-\frac{4}{r}=-\frac{\sqrt{5}}{5,}$

即$|b|=4\sqrt{5},<a,b>=\arccos(-\frac{\sqrt{5}}{5})\approx116.6^\circ$ ··········14 分

（22）本题满分 14 分

解：椭圆的半焦距 $c=\sqrt{4-3}=1$

得右焦点$F(1,0)$. 记$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$M(1,1)$和$\overline{FA}+\overline{FB}=2\overline{FM}$得

$(x_1+x_2-2,y_1+y_2)=2(0,1)$，所以$x_1+x_2=2,y_1+y_2=2$ ·······5 分

由A,B在椭圆上，得$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1,$

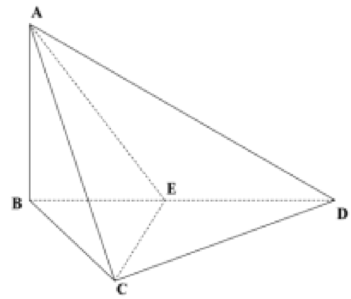
所以$\frac{1}{4}(x_1+x_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{3}(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$

得直线AB的斜率为$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4},$

直线的方程为$y=-\frac{3}{4}(x-1)+1$，即$3x+4y-7=0$.

所以点到直线的距离为$d=\frac{|3-7|}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{5}$.

（23）本题满分 14 分



（I）证：因为$AB\perp$面BCD，$AB\subset$面ABC，

所以面$ABC\perp$面BCD，

又面$ABC\perp$面ACD, $CD=$面$BCD\cap$面ACD，

所以 $CD\perp$面ABC，

因为$BC\subset$面ABC， 所以 $BC\perp CD$.

····6 分

（II）解：因为 $AB \perp$ 面 BCD， $AB \subset$ 面 ABD,

所以 面 $ABD \perp$ 面 BCD， BD 是交线.

过点 C 作 $CE \perp BD$, E 是垂足，则 $CE \perp$ 面 ABD，连结 AE，得 $\angle CAE$ 是直线 AC 与面 ABD 所成的角.　　　　····10 分

依设可知 BC 是 AC 在面 BCD 上的射影，由 $\angle ACB = 45^0$, 得 $BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$，

因为 $CE \perp BD, \angle CBD = 45^0$, 所以 $CE = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \frac{1}{2}AC$；

在 $Rt\Delta ACE$ 中， $\sin\angle CAE = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{2}$, 得 $\angle CAE = 30^0$,

即直线 AC 与面 ABD 所称的角等于 30^0.　　　　····14 分

（24）本题满分 15 分

解：题中所问的误判事件包含 3 种情形：

A_1:将 3 件正品都判为次品，且将 2 件次品都判为正品；

A_2：将 3 件正品判为 1 件正品 2 件次品，且将 2 件次品判为 1 件正品 1 件次品；

A_3：将 3 件正品判为 2 件正品 1 件次品，且将 2 件次品都判为次品.　····6 分

由题设，可得这 3 种情形出现的概率分别为：

$$P(A_1) = 0.1^3 \times 0.2^2 = 0.00004;$$

$$P(A_2) = C_3^1 0.9 \times 0.1^2 \times C_2^1 0.8 \times 0.2 \approx 0.0086;$$

$$P(A_3) = C_3^2 0.9^2 \times 0.1 \times 0.8^2 \approx 0.15552.$$　　　　····12 分

因为 A_1, A_2, A_3 是互斥事件，所以，得所要求的概率为

$$P = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \approx 0.1642.$$　　　　····15 分

（25）本题满分 15 分

（I）解：求导数， $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$,

得　$f'(0) = 0$; 当 $-1 < x < 0$ 时， $f'(x) < 0$；当 $x > 0$ 时， $f'(x) > 0$.

所以，函数 $f(x)$ 的单调区间为 $(-1,0]$ 和 $[0,+\infty)$. $f(x)$ 在区间 $(-1,0]$ 上是减函数，在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数，函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=0$. ・・・・5 分

（II）证：因为 $0<a-b<1\le a+b$, 所以 $a>b, 2b>a-a=0$,

得 $a>b>0$, 所以 $\dfrac{2a}{a+b}>1>\dfrac{2b}{a+b}>0$. ・・・・7 分

由（I）知：当 $x>-1$ 且 $x\neq 0$ 时，$x-\ln(x+1)>0$. 令 $t=x+1$,

则当 $t>0$ 且 $t\neq 1$ 时，$\ln t<t-1$.

所以 $a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}=-\left(a\ln\dfrac{a+b}{2a}+b\ln\dfrac{a+b}{2b}\right)$

$$>-\left[a\left(\frac{a+b}{2a}-1\right)+b\left(\frac{a+b}{2b}-1\right)\right]=0$$

其次，因为 $\dfrac{2b}{a+b}<\dfrac{a+b}{2a}$,

所以 $a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}<a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{a+b}{2a}$

$$=(a-b)\ln\frac{2a}{a+b}$$

$$<(a-b)\ln 2<\ln 2.$$

综合得 $0<a\ln\dfrac{2a}{a+b}+b\ln\dfrac{2b}{a+b}<\ln 2$. ・・・・・15 分

（26）本题满分 15 分

（I）解：设袋中共有 n 个球，则红、白球的个数分别为 $\dfrac{4n}{7}$ 和 $\dfrac{3n}{7}$.

所以，依题设可得 $\dfrac{C_{\frac{4n}{7}}^2}{C_n^2}=\dfrac{4}{13}$,

即 $13\times\dfrac{4n}{7}(\dfrac{4n}{7}-1)=4n(n-1)$,

解得 $n=14, \dfrac{4n}{7}=8, \dfrac{3n}{7}=6$.

所以，袋中有红球 8 个，白球 6 个. ・・・・・6 分

（II）解：用 A_i 表示事件“取球 i 次便停止取球”，$i=1,2,3$.

根据（I）的结论，可得

$$P(A_1)=\frac{4}{16}=\frac{3}{7},$$

$$P(A_2)=\frac{8}{16}\times\frac{6}{13}=\frac{3}{7}\times\frac{8}{13},$$

$$P(A_3)=\frac{8}{14}\times\frac{7}{13}\times\frac{6}{12}=\frac{2}{13}.$$ ·····12 分

因为 A_1、A_2、A_3是互斥事件，且$A_1+A_2+A_3$即为事件“取球不超过 3 次便停止”，所以，得所要求的概率为

$$P=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{11}{13}.$$ ·····15 分

（27）本题满分 15 分

(I)解：依题设得 $y^2=4x-2x^2>0$，即 $x(2-x)>0$

所以 x 的取值范围为$0<x<2$ ······3 分

（II）解：设 $f(x)=x^2y^2=4x^3-2x^4(0<x<2)$

则 $f'(x)=4x^2(3-2x)$ ······6 分

所以 $f'(\frac{3}{2})=0$；当$0<x<\frac{3}{2}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数；

当$\frac{3}{2}<x<2$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数，得 $f(x)$ 的最大值为

$f(\frac{3}{2})=\frac{27}{8}$，即有 $x^2y^2\le\frac{27}{8}$ ······10 分

所以 $\lg x+\lg y=\frac{1}{2}\lg(x^2y^2)\le\frac{3}{2}\lg\frac{3}{2}$

当 $x=\frac{3}{2}$时，$y=\sqrt{4x-2x^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以当 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$\lg x+\lg y$ 取值最大为

$m=\frac{3}{2}\lg\frac{3}{2}\approx 0.2641$ ······15 分