2008 年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题参考答案和评分参考

说明：

一、　本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

二、　对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、　解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、　只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

五、　所有考生做第一、第二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类考生做第三（24、25）题，报考史文类考生做第三（26、27）题.

一、　选择题：每小题选对给 5 分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给零分.

（1）D　(2)B　(3) B　(4) D　(5) C　(6) A

(7)　B　(8)A　(8) A　(10) B　(11) D　(12) C

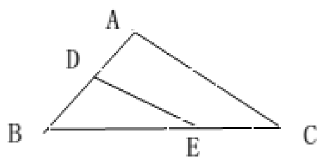
二、　填空题：每小题满分 4 分，只要求直接填写结果.

（13）$\frac{4}{3}$　（14）3　（15）$\frac{1}{2}$　（16）$\frac{8}{9}$

（17）x-2y-5z=1（18）-3x+9　（19）$4\sqrt{3}$　（20）180

三、解答题：

（21）本题满分 14 分



解：如图，因为$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$,所以，由题设

得　$\overline{DE}=\frac{5}{12}\overline{BA}+\frac{3}{4}\overline{AC}$

$=(-\frac{5}{12}+\frac{3}{4})\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{BC}$

$=\frac{1}{3}\overline{AB}+\frac{3}{4}\overline{BC}$　（1）……5 分

因为 A、D、B 共线，B、E、C 共线，所以可设

$\overline{DB}=\lambda\ \overline{AB}$， $\overline{BE}=\mu\ \overline{BC}$

得 $\overline{DE}=\overline{DB}+\overline{BE}=\lambda\ \overline{AB}+\mu\ \overline{BC}$ （2）

因为$\overline{AB}$和$\overline{BC}$不共线，所以由式（1）、（2）得$\lambda=\frac{1}{3}$， $\mu=\frac{3}{4}$. ····10 分

因为 ΔDEB 与ΔABC 有公共内角 B，所以其面积比为

$$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{|\overline{DB}|\bullet|\overline{BE}|}{|\overline{AB}|\bullet|\overline{BC}|}=|\lambda\mu|=\frac{1}{4}$$ ····14 分

(22)本题满分 14 分

（I）证：如图，由 PA⊥底面 ABC，知 AC 是 PC 在平面 ABC 上的射影；由 D 是 AC 的中点和 AB=BC,知 BD⊥AC，且 BD$\subset$平面 ABC，所以根据三垂线定理，得 BD⊥PC.

·····7 分

（II）解：在正ΔABC 中，BD⊥AC，BD=a，所以 AC=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$BD=$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

由 PA⊥底面 ABC，知 PA⊥AC,故由 AD=$\frac{1}{2}$AC=$\frac{\sqrt{3}}{3}a$,PD=a，得

$$PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a,$$

所以三棱锥 P—ABC 的体积为

$$V=\frac{1}{3}PA\bullet S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}PA\bullet AC\bullet BD=\frac{\sqrt{2}}{9}a^3$$ ·····14 分

（23）本题满分 14 分

解：因为 $f(x)=\cos x\sin x+2(\cos x+\sin x)$

$$=\cos x\sin x+\frac{1}{2}(\cos^2 x+\sin^2 x)-\frac{1}{2}+2(\cos x+\sin x)$$

$$=\sin^2(x+\frac{\pi}{4})+2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}$$

$$=[\sin(x+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}]^2-\frac{5}{2}$$ ····7 分

且 $\sin(x+\frac{\pi}{4})$的取值范围为$[-1,1]$，所以得 $f(x)$的最小值 m 和最大值 M 分别为

$$m=(-1+\sqrt{2})^2-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}-2\sqrt{2},$$

$$M=(1+\sqrt{2})^2-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+2\sqrt{2}$$

因此，$f(x)$的值域为$[\frac{1}{2}-2\sqrt{2},\frac{1}{2}+2\sqrt{2}]$ ·····14 分

（24）本题满分 15 分

（I）解： $a_n=\int_n^{n+1}xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_n^{n+1}=n+\frac{1}{2},n=1,2,3\cdots$；

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+2)}{2}\quad n=1,2,3,\cdots$$

（II）证：依题设，当$n\geq4$时，都有

$$\sum_{k=1}^{n}3^{1-k}=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n}),$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})=\frac{3}{2}-(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}),$$

所以 $T_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{3}{2}\times(-\frac{1}{3})$ ·····10 分

得 $T_n<\frac{2}{n+1}$；

其次，$T_n-\frac{2}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2(2+1)^{n-1}}$， (1)

由$n\geq4$, 知$2(2+1)^{n-1}>2(C_{n-1}^0+2C_{n-1}^1+4C_{n-1}^2)=4n^2-8n+6$

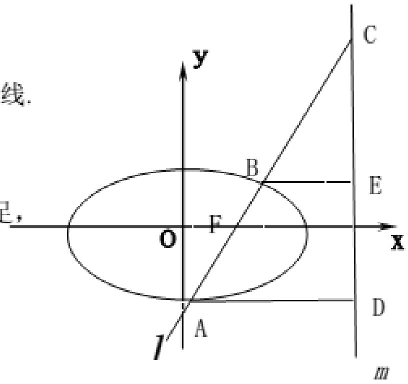
$=n^2+n(3n-8)+\geq n^2+4n+6>(n+1)n(+\quad>0$

所以，式（1）的右端大于 0，即有$T_n>\frac{2}{n+2}$

综合，得：当$n\geq4$时，都有$\frac{2}{n+2}<T_n<\frac{2}{n+1}$. ·····15 分

（25）本题满分 15 分

解：依题设做图如右，图中直线 m 是椭圆右准线.



由$\overline{AC}=3\overline{AB}$得$\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}=\frac{2}{3}\overline{AC}$,

过 A、B 分别作$AD\perp m$、$BE\perp m$，D,E 为垂足,

则 AD//BE,所以$\frac{|BE|}{|AD|}=\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{2}{3}$.

由椭圆的性质，知$\frac{|AF|}{|AD|}=\frac{|FB|}{|BE|}$,所以$\frac{|AF|}{|FB|}=\frac{|AD|}{|BE|}=\frac{3}{2}$,

因为$\overline{AF}$与$\overline{FB}$共线且同向，所以$\overline{AF}=\frac{3}{2}\overline{FB}$，

即得点 F 分有向线段$\overline{AB}$所成的比为$\frac{3}{2}$.　　　　·····7 分

由椭圆方程，可得 F(1,0)，右准线 m 得方程为 x=4.

设 A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2),C$(4,y_3)$,由$\overline{AC}=3\overline{AB}$, $\overline{AF}=\frac{3}{2}\overline{FB}$，知

$$\begin{cases}4-x_1=3(x_2-x_1),\\ 1-x_1=\frac{3}{2}(x_2-1),\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}3x_2-2x_1=4,\\ 3x_2+2x_1=5.\end{cases}$$

求得$x_2=\frac{3}{2}$，故$y_2^2=3(1-\frac{x_2^2}{4})=\frac{21}{16}$，得$y_2=\pm\frac{\sqrt{21}}{4}$.

故直线l（即 FB）的方程为$y=k(x-1)$,式中$k=\frac{y_2}{x_2-1}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$.·····13 分

所以，原点 O 到直线l的距离$d=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{5}$.　　　　·····15 分

（26）本题满分 15 分

（I）解：化函数式为$f(x)=\frac{1}{3}(x-\ln x),(x>0)$.

求导，得$f'(x)=\frac{1}{3}(1-\frac{1}{x})$.所以，$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

在区间（0,1）上，$f'(x)<0$, $f(x)$是减函数；在区间$(1,+\infty)$上，$f'(x)>0$, $f(x)$是增函数.

所以，当且仅当 x=1 时，$f(x)$取得最小值为$f(1)=\frac{1}{3}$.　　·····5 分

（II）证：用数学归纳法证明如下：

首先 由$a_1>0$且$a_1\neq 1$,根据（I）的解，知$a_2=3f(a_1)>3f(1)=1$,

所以$a_3=3f(a_2)>3f(1)=1$,　且$a_3-a_2=3f(a_2)-a_2=-\ln a_2<-\ln 1=0$,

即有$1<a_3<a_2$,表明：当 n=2 时，不等式成立；　　　　·····10 分

其次，假设$n=k\geq 2$时，不等式成立，即$a_k>a_{k+1}>1$,

则由（I）的解，知$f(a_k)>f(a_{k+1})>f(1)=\frac{1}{3}$,

所以$3f(a_k)>3f(a_{k+1})>1$,即$a_{k+1}>a_{k+2}>1$.

表明$n=k+1$时，不等式也成立. 综合，得：对任意$n\geq 2$，都$a_n>a_{n+1}>1$.…15 分

(27) 本题满分 15 分

解：由椭圆方程，求得右焦点 F(1,0),右准线为直线：x=4，离心率$e=\frac{1}{2}$.

……3 分

设 A$(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(4,y_3)$，则 A、B 到右准线的距离分别为

$$d_1=4-x_1,\ d_2=4-x$$

由 B 是 AC 的中点，知$2x_2=x_1+4$,　　(1)

即$4-x_1=2(4-x_2)$,，得$d_1=2d_2$.

由 A、B 在椭圆上，知$|AF|=d_1e,|BF|=d_2e$,

所以　$$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|d_1|}{|d_2|}=2.$$

因为，$\overline{AF}$与$\overline{FB}$是共线同向，所以$\overline{AF}=2\overline{FB}$，得点 F 分有向线段$\overline{AB}$所成的比为 2.

….9 分

因此$\frac{1-x_1}{x_2-1}=2$,即$2x_2=3-x_1$,　　(2)

联立（1）、（2）两式，求得$x_1=-\frac{1}{2}$.

其次，由$|AF|=d_1e$知$\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\frac{4-x_1}{2}$,

得　$$y_1^2=(\frac{4-x_1}{2})^2-(x_1-1)^2=(\frac{9}{4})^2-(\frac{3}{2})^2=5(\frac{3}{4})^2.$$

故　$y_1=\pm\frac{3\sqrt{5}}{4}$.　因为 A、F、C 共线，所以

$$\frac{y_3}{4-1}=\frac{y_1}{x_1-1},得\qquad y_3=\frac{3y_1}{x_1-1}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

因此点 C 的坐标为（4，$\frac{3\sqrt{5}}{2}$）或（4，$-\frac{3\sqrt{5}}{2}$）.　……15 分