2009年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题参考答案和评分参考

说明：

一、 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则.

二、 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、 只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

五、 所有考生做第一、第二题，在第三（21、22、23）题中任选两题；报考理工农医类考生做第三（24、25）题，报考史文类考生做第三（26、27）题.

一、选择题：每小题选对给5分，不选、选错或者选出的代号超过一个，一律给0分.

（1） C （2） D （3） A （4） C （5） D （6） B

（7） D （8） A （9） B （10） B （11） C （12） A

二、填空题：每小题满分4分，只要求直接填写结果。

（13）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ （14）$x=\frac{5}{2}$ （15）$\frac{\pi}{3}$ （16）$-\frac{1}{2}$

（17）$4x+3y+z=6$ （18）$\frac{1}{5}$ （19）x^2+2x-3 （20）0.09

三、解答题：

（21） 本题满分14分

解：曲线C的方程为 $y=\frac{8}{(x-1)^2}+2 \quad (x\neq1)$ ………………2分

求道得 $y'=-\frac{16}{(x-1)^3}$ 设 $A(x_1,y_1)$ 为切点，则由 l 的斜率为-2，得 $\begin{cases} -\frac{16}{(x_1-1)^3}=-2 \\ y_1=\frac{8}{(x_1-1)^2}+2 \end{cases}$

解得 $x_1=3, y_1=4$，所以，切点 A 的坐标为（3，4）

故 $a=2x_1+y_1=10$ ……………………8 分

于是 l 的方程为 $2x+y=10$

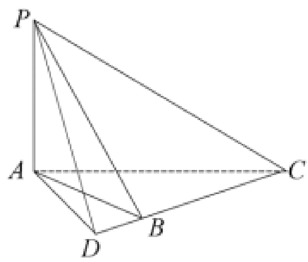
将 C 与 l 的方程联立

$$\begin{cases}2x+y=10\\ y=\dfrac{8}{(x-1)^2}+2\end{cases}，\quad 解得\ x_1=3, y_1=4；\ x_2=0，\ y_2=10$$

所以 C 与 l 公共点坐标为 $(3,4)$ 和 $(0,10)$

（22）本题满分 14 分

解：如图，过 A 作 AD⊥直线 BC，垂足为 D，连接 PD，



因为 PA⊥平面 ABC, 所以根据三垂线定理得 PD⊥BC，

故 ∠PDA 是二面角 P-BC-A 的平面角，依题设知∠PDA=60°

在 Rt△PDC 中，由∠PCB=30°，PB=BC 得∠CPD=60°，

∠CPB=30°，故∠BPD=30°，BD=$\frac{\sqrt{3}}{3}$PD, CD=$\sqrt{3}$PD

由 PA⊥平面 ABC，知 PA⊥AD,故

AD=PDcos∠PDA=$\frac{1}{2}$PD …………8 分

所以，在 Rt△ADC 中，

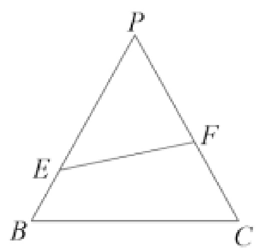
$$\tan\angle BAC=\tan(\angle DAC-\angle DAB)=\frac{\tan\angle DAC-\tan\angle DAB)}{1+\tan\angle DAC\tan\angle DAB}$$

$$=\frac{(CD-BD)AD}{AD^2+CD\cdot BD}=\frac{4\sqrt{3}}{15}$$ …………12 分

因为 tan∠BPC=tan30°=$\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{4\sqrt{3}}{15}$

所以，∠BPC>∠BAC …………14 分

（23）本题满分 14 分。



解：由题设知，$|\overline{AB}|=|\overline{AC}|=4$

因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\sin 60^0$，

$S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}|\overline{AE}|\cdot|\overline{AF}|\sin 60^0$，

由 $S_{\Delta AEF}=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}$ 得，$|\overline{AE}|\cdot|\overline{AF}|=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|=8$

设 $|\overline{AE}|=x$，$|\overline{AF}|=y$，则 $xy=8$，且 $0<x\le 4$，$0<y\le 4$，于是 $x=\frac{8}{y}\ge\frac{8}{4}=2$

由 $\overline{EF}=\overline{EA}+\overline{AF}$ $\overline{EF}\cdot\overline{BC}=\overline{EA}\cdot\overline{BC}+\overline{AF}\cdot\overline{BC}=2x+2y=2(x+\frac{8}{x})$ …………9 分

考虑函数 $f(x)=2(x+\frac{8}{x})$，$(2\le x\le 4)$ 求导，得 $f'(x)=2(1-\frac{8}{x^2})$。令 $f'(x)=0$，得 $x=2\sqrt{2}$.

当 $2\le x\le 2\sqrt{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当 $2\sqrt{2}<x\le 4$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增。

又 $f(2\sqrt{2})=8\sqrt{2}$, $f(2)=f(4)=12$,

故 $f(x)$ 在[2，4]上的最小值为 $8\sqrt{2}$，最大值为 12，即 $f(x)$ 的值域为$[8\sqrt{2},12]$.

因此，$\overline{EF}\cdot\overline{BC}$ 的取值范围是$[8\sqrt{2},12]$. …14 分

（24）本题满分 15 分

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c，则 $c=\sqrt{a^2-1}$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$E(\frac{a^2}{c},0)$.

由 F_2 是 F_1E 的中点知，$\frac{a^2}{c}-c=2c$，于是 $a^2=3c^2=3\left(a^2-1\right)$，因此 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ……5 分

（Ⅱ）由 $P\in l$ 可设 $P(\frac{a^2}{c},p)$. 从而 $|PF_2|=\sqrt{(\frac{a^2}{c}-c)^2+p^2}$，$|F_1F_2|=2c$ ………10 分

由题设知 $\sqrt{(\frac{a^2}{c}-c)^2+p^2}\ne 4c$，即 $p^2\ne 16c^2-(\frac{a^2}{c}-c)^2$

由 p 的任意性知 $16c^2-(\frac{a^2}{c}-c)^2<0$，$4c<\frac{a^2}{c}-c$，故 $\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{5}$，

由此得椭圆离心率的取值范围为 $(0,\frac{\sqrt{5}}{5})$…………15 分

（25）本题满分 15 分

解：（Ⅰ）由题设知

$$a_n=p+p^2+\cdots\cdots+p^n=\begin{cases} n, & 当p=1时, \\ \dfrac{p-p^{n+1}}{1-p} & 当p\ne 1时, \end{cases}$$

所以，当 p=1 时，数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=n$，当 p≠1，数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=\frac{p}{p-1}(p^n-1)$

……4 分

（Ⅱ）证明：由题设知

$f_n(x)=1+a_nx+b_nx^2+\cdots$，

$f_{n+1}(x)=1+a_{n+1}x+b_{n+1}x^2+\cdots$

又$f_{n+1}(x)=(1+p^{n+1}x)f_n(x)=1+(a_n+p^{n+1})x+(b_n+a_np^{n+1})x^2+\cdots$,

所以$b_{n+1}=b_n+a_np^{n+1}$

而由$f_1(x)=1+px$知$b_1=0$.

(i)　当 n≥2 时，因为 p>0 且 p≠1，所以

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)=a_{n-1}p^n+a_{n-2}p^{n-1}+\cdots+a_1p^2$

$$=\frac{p^2}{p-1}\sum_{i=1}^{n-1}(p^{2k}-p^k)=\frac{p^2}{p-1}\left(\frac{p^2-p^{2n}}{1-p^2}-\frac{p-p^n}{p-1}\right)=\frac{p^2}{p-1}(p^n-p)\left(\frac{p^n+p}{p+1}-1\right)$$

即得$b_n=\frac{p^3}{(p-1)^2(p+1)}(p^{n-1}-1)(p^n-1)$　……12 分

(ii)　当 n=1 时，由$b_1=0$，$p^0=1$知上式对于 n=1 也成立

综合(i)(ii)，可取常数$c=\sqrt{\frac{p^3}{(p-1)^2(p+1)}}>0$和等比数列$c_n=cp^{n-1}$，便可满足

$b_n=(c_n-c)(c_{n-1}-c)$　…………15 分

（26）本题满分 15 分

解：（Ⅰ）设椭圆的半焦距为 c，则$c=\sqrt{a^2-1}$, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $E(\frac{a^2}{c},0)$,

由 F_2 是 F_1E 中点知 $\frac{a^2}{c}-c=2c$ 于是$a^2=3c^2=3(a^2-1)$　　因此$a=\frac{\sqrt{6}}{2}$　………5 分

（Ⅱ）线段 F_1P 的中垂线不经过点 F_2 的充要条件为$|F_1F_2|\neq|F_2P|$,

由$P\in l$可设$P(\frac{a^2}{c},p)$，故对任意实数 P

$2c \neq \sqrt{(\frac{a^2}{c}-c)^2+p^2}$，即 $p^2 \neq 4c^2-(\frac{a^2}{c}-c)^2$ ……10 分

故有 $4c^2-\left(\frac{a^2}{c}-c\right)^2<0$，$2c<\frac{a^2}{c}-c$，$\frac{c^2}{a^2}<\frac{1}{3}$，

所以离心率 e 的取值范围为 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ …………15 分

（27）本题满分 15 分

解：（Ⅰ）由题设知

$$a_n=p+p^2+\cdots\cdots+p^n=\begin{cases} n, & 当p=1时， \\ \dfrac{p-p^{n+1}}{1-P} & 当p\neq 1时， \end{cases}$$

所以，当 p=1 时，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=n$，当 p≠1，数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=\frac{p}{p-1}(p^n-1)$

……4 分

（Ⅱ） 证明：当 p=2 时，$a_n=2(2^n\text{-}1)$

$f_{n+1}(x)=(1+2^{n+1}x)f_n(x) \quad =(1+2^{n+1}x)(1+a_nx+b_nx^2+\cdots)$

$=1+ (a_n+ 2^{n+1} x)+ b_n(+ {}^{n+1}2a_n x^3)\cdots\cdots$

所以，$b_{n+1}=b_n+2^{n+1}a_n=b_n+2^{n+2}(2^n-1)$

而由 $f_1(x)=1+2x$ 得 $b_1=0$ …… 8 分

（ⅰ）当 n≥2 时，

$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-$

$=2^{n+1}(2^{n-1}-1)+{}^n2({}^{n-2}2-\cdots1)+{}^3\ 2$

$=4\sum_{k=1}^{n-1}(2^{2k}-{}^k2 \quad =4(\frac{2^2-2^{2n}}{1-4}-\frac{2-2^n}{1-2})=4(2-2^n)(1-\frac{2+2^n}{3})$

即 $b_n=\frac{8}{3}(2^{n-1}-1)(2^n-1)$ …………12 分

（ⅱ）当 n=1 时，由 $b_1=0$，和 $2^0=1$，知上式对于 n=1 也成立

综合（ⅰ）（ⅱ）可取常数 $c=\frac{8}{3}$ 和等比数列 $c_n=2^{n-1}$ 便可满足 $b_n=c(c_n-1)(c_{n+1}-1)$ ……15 分