2011 年中华人民共和国普通高等学校

联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试

数学试题答案及评分参考

说明：

1. 本解答题给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答为改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题

20. D　2. B　3. A　4. C　5. D　6. A　7. D　8. C　9. D　10. C

11. A　12. B

21. 填空题

19. 0或$\frac{1}{4}$　14. ①③　15. $\sqrt{2}$　16. $8x+5y+7z-28=0$

17. $2x-1$　18. $\frac{21}{64}$

（1）解答题

（19）解：（Ⅰ）当$x\ge\frac{3}{2}$时，$f(x)=2x-3+x+2=3x-1$，此时$f(x)\ge 3\cdot\frac{3}{2}-1=\frac{7}{2}$；

当$-2<x<\frac{3}{2}$时，$f(x)=3-2x+x+2=5-x$，此时$5-(-2)>f(x)>5-\frac{3}{2}$，即$7>f(x)>\frac{7}{2}$；

当$x\le -2$时，$f(x)=3-2x-(x+2)=1-3x$，此时$f(x)\ge 1-3(-2)=7$；

综上$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\ge\frac{3}{2},\\ 5-x, & -2<x<\frac{3}{2},\\ 1-3x, & x\le -2\end{cases}$　　$f(x)_{\min}=\frac{7}{2}$。

（Ⅱ）当$x\ge\frac{3}{2}$时，$f(x)<5\Leftrightarrow 3x-1<5\Rightarrow x<2$，此时解为$\frac{3}{2}\le x<2$；

当$-2<x<\frac{3}{2}$时，$f(x)<5\Leftrightarrow 5-x<5\Rightarrow x>0$，此时解为$0<x<\frac{3}{2}$；

当$x\le -2$时，$f\left(x\right)<5\Leftrightarrow 1-3x<5\Rightarrow x>-\dfrac{4}{3}$，此时解为$\varnothing$；

综上$f\left(x\right)<5$的解集为$\left\{x\middle|0<x<2\right\}$。

（20）解：（1）法一：利用和差化积公式

由A,B是锐角，则$A<\dfrac{\pi}{2}<B+C$及$B<\dfrac{\pi}{2}<A+C$，故得$A-B<C$及$B-A<C$，可得

$\cos\dfrac{A-B}{2}>\cos\dfrac{C}{2}$, 又$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$,

所以$\sin A+\sin B-(1+\cos C)\ =2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-2\cos^2\dfrac{C}{2}$

$=2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{C}{2}\right)>0$

法二：利用导数，之前强调过的，如果两个变量，可把其中一个变量当做常数。

设函数$f\left(A\right)=\sin A+\sin B-(1+\cos C)=\sin A+\sin B+\cos\left(A+B\right)-1$,

对A求导得$f'\left(A\right)=\cos A+\sin\left(A+B\right)$

因为$0<A,B<\dfrac{\pi}{2}$, 所以$\dfrac{\pi}{2}<A+B<\pi<\dfrac{3\pi}{2}-A$,

则$\sin\left(A+B\right)>\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-A\right)=-\cos A$, 所以$f'\left(A\right)>0$，则$f\left(A\right)$是增函数，故$f\left(A\right)>f\left(0\right)$，

而当$A=0$时，$B=C=\dfrac{\pi}{2}$，此时$f\left(0\right)=0$，所以$f\left(A\right)>0$。

（2）利用（1）结论：$\sin A+\sin B+\sin C>1+\cos C+\sin C=1+\sqrt{2}\sin(C+\dfrac{\pi}{4})$，

因为C是锐角，所以$\dfrac{\pi}{4}<C+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3\pi}{4}$，则$\sin(C+\dfrac{\pi}{4})>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$1+\sqrt{2}\sin(C+\dfrac{\pi}{4})>2$，左边结论成立。

下面证右边成立

法一：$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}(\cos\dfrac{A-B}{2}+\sin\dfrac{C}{2})$

$\le 2\cos\dfrac{C}{2}(1+\sin\dfrac{C}{2})$ （当$A=B$时取得等号）

令$f(C)=2\cos\dfrac{C}{2}(1+\sin\dfrac{C}{2})$，则$f'(C)=2\sin^2\dfrac{C}{2}+\sin\dfrac{C}{2}-1$，

令$f'(C)=0$得$C=\dfrac{\pi}{3}$，（只有一个极值则为对应的最值），故$f(C)_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$。

法二：设 $A\le B\le C$，做出 $f(x)=\sin x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 之间的图像，构造三角形

$A(A,sinA)$, $B(B,sinB)$,$C(C,sinC)$，则三角形重心 G 坐标为 $\left(\dfrac{A+B+C}{3},\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)$,

由于 G 在图象下方，有 $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le f\left(\dfrac{A+B+C}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得证。

有点直观，就是这么简单。

法三：利用 Jensen 不等式，任何一本高中竞赛书上都有。

法四

1. sinA+sinB=2sin[(A+B)/2]*cos[(A-B)/2]≤2sin[(A+B)/2]

以下模仿从 a2+b2≥2ab 到 a3+b3+c3≥3abc 的一个方法

sinA+sinB+sinC+sin[(A+B+C)/3]≤2sin[(A+B)/2]+2sin{[C+(A+B+C)/3]/2}

≤4sin[(...)/2]=4sin[(A+B+C)/3]

即 sinA+sinB+sinC≤3sin[(A+B+C)/3]

（21）解：（Ⅰ）由 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 得 $y'=\dfrac{x}{2}$，设 $A\left(x_1,\dfrac{x_1^2}{4}\right),B\left(x_2,\dfrac{x_2^2}{4}\right)$，则 $k_{PA}=\dfrac{x_1}{2},k_{PB}=\dfrac{x_2}{2}$，

所以直线 PA 方程为 $y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，直线 PB 方程为 $y-\dfrac{x_2^2}{4}=\dfrac{x_2}{2}(x-x_2)$，

由 $\begin{cases} y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1), \\ y-\dfrac{x_2^2}{4}=\dfrac{x_2}{2}(x-x_2) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{x_1x_2}{4} \end{cases}$，即点 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{4}\right)$，

当 $k=1$ 时，把 $y=x+1$ 代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$，得 $x^2-4x-4=0$，所以 $x_1+x_2=4,x_1x_2=-4$，

故点 P 的坐标为 $(2,-1)$。

（Ⅱ）把 $y=kx+1$ 代入 $y=\dfrac{x^2}{4}$，得 $x^2-4kx-4=0$，$\Delta=16k^2+16>0$ 所以 $x_1+x_2=4k,x_1x_2=-4$，

故 $\begin{cases} x=2k, \\ y=-1 \end{cases}$，所以点 P 的轨迹为 $y=-1(x\in R)$。

（22）解：（Ⅰ）$a_1=1,\ a_2=S_1+1=a_1+1=2$，$a_3=S_2+2=a_1+a_2+1=5$；

（Ⅱ）由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 得，$a_{n+1}=S_n+n \Leftrightarrow S_{n+1}-S_n=S_n+n \Leftrightarrow S_{n+1}=2S_n+n$，

两边同加 $n+2$ 得，$S_{n+1}+n+2=2S_n+n+n+2=2\left(S_n+n+1\right)$，即 $b_{n+1}=2b_n$，

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=S_1+2=a_1+2=3$ 为首项、2 为公比的等比数列。

（Ⅲ）由（Ⅱ）得 $b_n=3\cdot2^{n-1}$，所以 $S_n=b_n-\left(n+1\right)=3\cdot2^{n-1}-\left(n+1\right)$，

当 $n\ge2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot2^{n-2}-1$；当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 不适合上式。

所以 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 3\cdot2^{n-2}-1, & n\ge2\end{cases}$。