2012年中华人民共和国普通高等学校
联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试
数学试题答案及评分参考

说明：

1.本解答题给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2.对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答为改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3.解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4.只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题

1. B　2. A　3. D　4. C　5. A　6. C　7. B　8. D　9. A　10. B
11. D　12. C

21. 填空题

19.　182　　14.　$x+2y=9$　　15.　$9\sqrt{2}$　　16. $x-y+z-1=0$

17.　$8x-3$　　18.　$\frac{8}{5}\pi$

（1）解答题

19. 解：（1）由$(\tan A+1)(\tan B+1)=2$可得

$$\left(\frac{\sin A}{\cos A}+1\right)\left(\frac{\sin B}{\cos B}+1\right)=2 \Leftrightarrow (\sin A+\cos A)(\sin B+\cos B)=2\cos A\cos B$$

$\Leftrightarrow \sin A\cos B+\cos A\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B \Leftrightarrow \sin(A+B)=\cos(A+B)$，

故在三角形中$A+B=45^\circ$，所以$C=135^\circ$。　　（5分）

（2）$\cos 2B+\sin^2 C=1+\sin^2 A \Leftrightarrow 1-2\sin^2 B+\sin^2 C=1+\sin^2 A \Leftrightarrow \sin^2 C-2\sin^2 B=\sin^2 A$

由正弦公式可得$c^2-2b^2=a^2$，　　（9分）

由余弦公式可得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

上两式联立得$b=-2a\cos C=-2\times 2\times\cos 135^\circ=2\sqrt{2}$，　　（13分）

所以$S=\frac{1}{2}ab\sin C=2$。　　（15分）

20（Ⅰ）$a_n=a_1q^{n-1}=a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$；

当$n\geq 2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\left(n^2+3n\right)-\left(\left(n-1\right)^2+3\left(n-1\right)\right)=2n+2$

当$n=1$时，$b_1=S_1=4$适合上式，因此$b_n=2n+2$。（5分）

（Ⅱ）$b_n+\log_p a_n=r\Leftrightarrow 2n+2+\log_p a\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=r\Leftrightarrow 2n+2+\log_p a-\left(n-1\right)\log_p 2=r$

$\Rightarrow\left(2-\log_p 2\right)n+2+\log_p a+\log_p 2=r$

若存在正数p和r使$b_n+\log_p a_n=r$对任意正整数n都成立，则$\log_p 2=2,2+\log_p a+\log_p 2=r$，

故$p=\sqrt{2}$，$r=4+\log_{\sqrt{2}}a$。（10分）

若r也是正数，讨论如下：

当$a>\frac{1}{4}$时，$\log_{\sqrt{2}}a>\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}=-4$，则$r=4+\log_{\sqrt{2}}a>0$，存在正数$r=4+\log_{\sqrt{2}}a$；

若$a\leq\frac{1}{4}$时，$\log_{\sqrt{2}}a\leq\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{4}=-4$，则$r=4+\log_{\sqrt{2}}a\leq 0$，不存在正数$r$。（15分）

21.解：（Ⅰ）设直线l的方程为$x=my+c$，因为直线与圆相切，所以圆心到直线的距离等于半径，

故$\frac{\left|1-c\right|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，化简得$m^2=c^2-2c\geq 0$；

把$x=my+c$带入$y^2=4x$得：$y^2-4\left(my+c\right)=0$，即$y^2-4my-4c=0$；

由直线与抛物线有两个不同的交点，得$\Delta=\left(-4m\right)^2-4\left(-4c\right)=16m^2+16c>0$，

$\Rightarrow m^2+c>0$，（3分）

把$m^2=c^2-2c$带入得$c^2-c>0$，联立$m^2=c^2-2c\geq 0$与$c^2-c>0$，

解得$c\geq 2$或$c<0$。（7分）

（Ⅱ）设$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，则由韦达定理得$y_1+y_2=4m$、$y_1y_2=-4c$；

因为A、B两点在抛物线$y^2=4x$上，所以抛物线的焦点$F\left(1,0\right)$且$x_1=\frac{y_1^2}{4}$、$x_2=\frac{y_2^2}{4}$；

因此$\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{FB}=\left(x_1-1,y_1\right)\bullet\left(x_2-1,y_2\right)=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+y_1y_2$

$=x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1+y_1y_2=\frac{y_1^2}{4}\frac{y_2^2}{4}-\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+y_1y_2+1$

$=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16}-\dfrac{(y_1+y_2)^2}{4}+\dfrac{3}{2}y_1y_2+1=\dfrac{(-4c)^2}{16}-\dfrac{(4m)^2}{4}+\dfrac{3}{2}(-4c)+1$

$=c^2-4m^2-6c+1=c^2-4(c^2-2c)-6c+1=-3c^2+2c+1=0$

解得 $c=1$（舍）或 $c=-\dfrac{1}{3}$，（12 分）

$m=\pm\sqrt{c^2-2c}=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}$；

因此直线方程是 $x=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}y-\dfrac{1}{3}$，即 $3x\pm\sqrt{7}y+1=0$。（15 分）

三、解：由函数是增函数，得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c\geq 0$ 恒成立，故 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4b^2-12ac\leq 0\end{cases}$，

因此 $\begin{cases}a>0,\\ c\geq\dfrac{b^2}{3a}\end{cases}$；（4 分）

而 $g(x)=f(x+x_0)-f(x_0)=a(x+x_0)^3+b(x+x_0)^2+c(x+x_0)-ax_0{}^3-bx_0{}^2-cx_0$

$=ax^3+(3ax_0+b)x^2+(3ax_0^2+2bx_0+c)x$，

有对任意 $x_0\geq-\dfrac{1}{2}$，$g(x)$ 都不是奇函数，则可得 $3ax_0+b\neq 0$ 对任意 $x_0\geq-\dfrac{1}{2}$ 恒成立，

因为 $a>0,x_0\geq-\dfrac{1}{2}$，则 $3ax_0\geq-\dfrac{3}{2}a$，因此有 $3ax_0+b\geq-\dfrac{3}{2}a+b>0$ 恒成立，即 $b>\dfrac{3}{2}a$

所以 $2b-3a>0$，（8 分）

而 $a>0,c\geq\dfrac{b^2}{3a}>0$，因此 $M=\dfrac{3a+2b+c}{2b-3a}>0$。（9 分）

设 M 的最小值为 m，则 $M=\dfrac{3a+2b+c}{2b-3a}=m>0$ 有解，

则 $3a+2b+c=m(2b-3a)$，$\Rightarrow(3+3m)a+(2-2m)b+c=0$

因为 $c\geq\dfrac{b^2}{3a}$，　所以 $(3+3m)a+(2-2m)b+\dfrac{b^2}{3a}\geq 0$ 有解，（11 分）

化简得 $(3+3m)+(2-2m)\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\geq 0$，则 $\Delta=(2-2m)^2-4\dfrac{1}{3}(3+3m)\geq 0$，

解得 $m\geq 3$ 或 $m\leq 0$（舍），故 M 的最小值为 3。（15 分）