2013年中华人民共和国普通高等学校
联合招收华侨、港澳地区、台湾省学生入学考试
数学试题答案及评分参考

说明：

1. 本解答题给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答为改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. A　5. C　6. A　7. D　8. D　9. C　10. A
11. D　12. B

21. 填空题

19. $a_n = 4n-4$　14. $\{x|x>4或x<-3\}$　15. $\frac{1}{48}$　16. $y=x$

17. 3　18. -1

（1）解答题

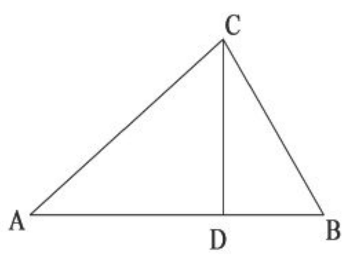
19. 解：（Ⅰ）$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A} \Rightarrow \cos A \bullet \sin A=\cos B \bullet \sin B \Rightarrow \sin 2A=\sin 2B$，

在ΔABC中，$0<A,B<\pi$，则$0<2A,2B<2\pi$，故$2A=2B$或$2A+2B=\pi$，由$a<b$得$A\neq B$，

故$A+B=\frac{\pi}{2}$，则$C=\frac{\pi}{2}$，因此ΔABC为直角三角形。

（Ⅱ）第二问至少有三种方法，利用勾股定理，利用等角的三角函数值相等，利用三角形相似形，均可得出结论，基本是初中数学的知识，可见今年联考数学的简单程度。

如下图：设$DB=x$，则$AD=2x, AB=3x$，



法一：利用勾股定理，在 $Rt\Delta ACD$ 中 $AC^2=AD^2+CD^2$，在 $Rt\Delta BCD$ 中 $BC^2=BD^2+CD^2$，在 $Rt\Delta ABC$ 中 $AB^2=AC^2+BC^2$，所以 $(3x)^2=(2x)^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2+x^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2$，解得 $x=3$，故

$a=BC=\sqrt{3^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{3}$，$b=AC=\sqrt{6^2+\left(3\sqrt{2}\right)^2}=3\sqrt{6}$，$c=AB=3x=9$。

法二：利用等角的三角函数值相等，有已知可得 $\angle A=\angle BCD$，则 $\tan\angle A=\tan\angle BCD$，故 $\frac{3\sqrt{2}}{2x}=\frac{x}{3\sqrt{2}}\Rightarrow x=3$，故 $a=3\sqrt{3},b=3\sqrt{6},c=9$。

法三：利用三角形相似形，易得 $\Delta ACD\cong\Delta CDB$，则 $\frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$，或直接利用初中的直角三角形的"射影定理"，得 $CD^2=AD\bullet BD$，解得 $x=3$，故 $a=3\sqrt{3},b=3\sqrt{6},c=9$。

20（Ⅰ）利用我们讲过的"看提示凑等比"的技巧，只需在等式两边同时加 3，得 $a_{n+1}+3=2a_n+6=2\left(a_n+3\right)$，故 $\{a_n+3\}$ 是首项为 $a_1+3=2$、公比为 2 的等比数列。

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $a_n+3=2^n$，故 $b_n=\frac{1}{\log_2\left(a_n+3\right)\log_2\left(a_{n+1}+3\right)}=\frac{1}{\log_2 2^n\bullet\log_2 2^{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}$，

由练过很多遍的"裂项法"，得 $b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

故 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

21.解：（Ⅰ）由题意得，$c=2\sqrt{6}$，$|BF|=\sqrt{c^2+b^2}=a=5$，故 $b=1$，故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{25}+y^2=1$。

（Ⅱ）法一：由已知得 $A(5,0),B(1,0)$，则直线 AB 的方程为 $\frac{x}{5}+\frac{y}{1}=1$，即 $x+5y-5=0$；由椭圆的参数方程，不妨设点 P 的坐标为 $(5\cos\theta,\sin\theta)$，则由点到直线的距离公式及三角形面积公式得 $S=\frac{1}{2}|AB|\bullet d=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+5^2}\bullet\frac{|5\cos\theta+5\sin\theta-5|}{\sqrt{1^2+5^2}}=3$，化简得 $|\cos\theta+\sin\theta-1|=\frac{6}{5}$，

所以 $\cos\theta+\sin\theta=-\frac{1}{5}$ 或 $\frac{11}{5}$，又因为 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$，

故 $\cos\theta+\sin\theta=\frac{11}{5}$（舍），所以 $\cos\theta+\sin\theta=-\frac{1}{5}$，联立 $\begin{cases}\cos\theta+\sin\theta=-\frac{1}{5},\\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}\cos\theta=\frac{3}{5},\\ \sin\theta=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{4}{5},\\ \sin\theta=\frac{3}{5}\end{cases}$，故点 P 的坐标为 $\left(3,-\frac{4}{5}\right)$ 或 $\left(-4,\frac{3}{5}\right)$。

法二：由已知得 $A(5,0),B(1,0)$，则直线 AB 的方程为 $\frac{x}{5}+\frac{y}{1}=1$，即 $x+5y-5=0$；

由已知得 $S=\frac{1}{2}|AB|\bullet d=3$，故点 P 到直线的距离 $d=\frac{6}{\sqrt{26}}$，则点 P 在与直线 AB 平行且与直线 AB 的距离为 $d=\frac{6}{\sqrt{26}}$ 的直线上，设此类直线为 $x+5y+c=0$，故 $d=\frac{|c+5|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{6}{\sqrt{26}}$，

解得 $c=1$ 或 $c=-11$，由点 P 在椭圆上，故联立 $\begin{cases}x+5y+1=0\\ \frac{x^2}{25}+y^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3,\\ y=-\frac{4}{5}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-4,\\ y=\frac{3}{5}\end{cases}$；

联立 $\begin{cases}x+5y-11=0\\ \frac{x^2}{25}+y^2=1\end{cases}$ 无解，故设点 P 的坐标为 $\left(3,-\frac{4}{5}\right)$ 或 $\left(-4,\frac{3}{5}\right)$。

22.（Ⅰ）$f'(x)=2e^x(x-1)+2e^x-2ax=2x-2ax=2x\left(e^x-a\right)$，

若对任意 $x\geq0$，$f'(x)\geq0$，则 $e^x-a\geq0$ 恒成立，即 $e^x\geq a$ 恒成立，而当 $x\geq0$ 时，$e^x\geq e^0=1$，所以 $a\leq1$，所以 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$。

（Ⅱ）利用强调过的讨论极值的套路，令 $f'(x)=0$ 分“有无解”，“若有解，解的大小”讨论。

令 $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left(e^x-a\right)=0\Leftrightarrow x=0$ 或 $e^x=a$，所以讨论如下：

（1）当 $a\leq0$ 时，则 $f'(x)=0\Rightarrow x=0$，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	↓	极小值	↑

此时，$f(x)$的极小值为$f(0)=-2$，无极大值。

（2）当$0<a<1$时，则$f'(x)=0\Rightarrow x=0$或$x=\ln a<0$，

x	$(-\infty,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

此时，$f(x)$的极大值为$f(\ln a)=2a(\ln a-1)-a(\ln a)^2$，极小值为$f(0)=-2$。

（3）当$a=1$时，$f'(x)=2x(e^x-1)=0\Rightarrow x=0$，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↑	无极值	↑

此时，$f(x)$无极值。

（4）当$a>1$时，则$f'(x)=0\Rightarrow x=0$或$x=\ln a>0$，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\ln a)$	$\ln a$	$(\ln a,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↑	极大值	↓	极小值	↑

此时，$f(x)$的极大值为$f(0)=-2$，极小值为$f(\ln a)=2a(\ln a-1)-a(\ln a)^2$。